

Title	Asymptotic Properties of Estimators in Non-Regular Situations
Author(s)	赤平, 昌文
Citation	数理解析研究所講究録 (1983), 507: 44-59
Issue Date	1983-12
URL	http://hdl.handle.net/2433/103760
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

Asymptotic Properties of Estimators
in Non-Regular Situations

赤平 昌文 (Masafumi Akahira)

はじめに.

適当な正則条件の下で、推定量の漸近的性質に関する研究は、高次の場合を含めて盛んに行われてきた。一方、非正則な場合にも同様な研究は試みられてきてはいるが、まだ十分とはいえない。しかし一緻性に関する収束の order としてそれらの orders の限界等については知られている。また漸近十分性についても、LeCam (1956) による定義が非正則な場合にも適用され論じられた (Akahira, 1976; Weiss, 1979; Mita, 1979)。非正則な場合の漸近有効性については、竹内 (1974) において一様分布の場合が論じられ、Akahira (1982a) において、より一般の場合まで拡張された。

ここでは、非正則な場合に一般ベイズ推定量の両側漸近有効性について論じ、さらに n^{-1} の order まで、すなわち 2 次の両側漸近有効性についても考察する。

1. 定義と仮定

$(\mathcal{X}, \mathcal{B})$ を標本空間とし、 $\{P_\theta : \theta \in \mathcal{H}\}$ を $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$ 上の確率測度の族とする。ここで \mathcal{H} はパラメータ空間である。 \mathcal{H} を \mathbb{R}^1 の開集合と仮定する。 $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$ の n 個の直積を $(\mathcal{X}^{(n)}, \mathcal{B}^{(n)})$ とし、その上の P_θ の n 個の直積測度を P_θ^n とする。このとき θ の推定量は $\mathcal{X}^{(n)}$ から \mathcal{H} への $\mathcal{B}^{(n)}$ -可測関数列 $\{\hat{\theta}_n\}$ によって定義し、これを単に $\hat{\theta}_n$ と表わすことにする。

正数のある単調増加列 $\{c_n\}$ ($\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \infty$) に対して、 $\hat{\theta}_n$ が $\{c_n\}$ -一致推定量であるとは、任意の $\varepsilon > 0$ と任意の $\vartheta \in \mathcal{H}$ に対して、十分に小さい正数 δ と十分に大きい正数 L が存在して

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sup_{\theta: |\theta - \vartheta| < \delta} P_\theta^n \{c_n |\hat{\theta}_n - \theta| \geq L\} < \varepsilon$$

が成り立つことであると定義する。

各 $k=1, 2, \dots$ に対して、ある $\{c_n\}$ -一致推定量が k 次の漸近的中央値不偏 (asymptotically median unbiased, 略して AMU) であるとは、任意の $\vartheta \in \mathcal{H}$ に対して、ある正数 δ が存在して

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\theta: |\theta - \vartheta| < \delta} c_n^{k-1} \left| P_\theta^n \{\hat{\theta}_n \leq \theta\} - \frac{1}{2} \right| = 0 ;$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\theta: |\theta - \vartheta| < \delta} c_n^{k-1} \left| P_\theta^n \{\hat{\theta}_n \geq \theta\} - \frac{1}{2} \right| = 0$$

が成り立つことであると定義する。

ある AMU 推定量 $\hat{\theta}_n^*$ が、次の両側漸近的有効であるとは、
 任意の AMU 推定量 $\hat{\theta}_n$ 、任意の $\theta \in \mathbb{H}$ 、任意の $t > 0$ に対して

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n^{k-1} [P_\theta^n \{c_n |\hat{\theta}_n^* - \theta| < t\} - P_\theta^n \{c_n |\hat{\theta}_n - \theta| < t\}] \geq 0$$

が成り立つことであると定義する。

各 $\theta \in \mathbb{H}$ に対して、 P_θ がある有限測度 μ に関して絶対連続であると仮定し、そのとき密度関数 $dP_\theta/d\mu$ を $f(x, \theta)$ で表わす。 $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ をたがいに独立で、いずれも密度関数 $f(x, \theta)$ をもつ分布に従う確率変数列とする。また $\mathcal{X} = \mathbb{H} = R'$ と仮定する。

$L_n(u)$ は R' 上で定義された有界、非負で $|u|$ の単調増加関数とし、 $\pi(\theta)$ を \mathbb{H} 上で定義された非負の関数とする。このとき事後密度 $p_n(\theta | \tilde{x}_n)$ と事後リスク $r_n(d | \tilde{x}_n)$ ($d \in \mathbb{H}$) を

$$p_n(\theta | \tilde{x}_n) = \frac{\prod_{i=1}^n f(x_i, \theta) \pi(\theta)}{\int_{\mathbb{H}} \left\{ \prod_{i=1}^n f(x_i, \theta) \right\} \pi(\theta) d\theta} ;$$

$$r_n(d | \tilde{x}_n) = \int_{\mathbb{H}} L_n(d - \theta) p_n(\theta | \tilde{x}_n) d\theta$$

によって定義する。ただし $\tilde{x}_n = (x_1, \dots, x_n)$ とする。

いま、すべての $u \in R'$ に対して

$$\lim_{n \rightarrow \infty} L_n\left(\frac{u}{c_n}\right) = L^*(u)$$

このとき損失関数 L^* に関する事後リスク $r_n^*(d|\tilde{x}_n)$ を

$$r_n^*(d|\tilde{x}_n) = \int_{\Theta} L^*(c_n(d-\theta)) p_n(\theta|\tilde{x}_n) d\theta$$

によって定義する.

$\hat{\theta}_n$ が損失関数 L^* と事前密度 π に関する一般ベイズ推定量 (generalized Bayes estimator 略して GBE) であるとは、

$$r_n^*(\hat{\theta}_n|\tilde{x}_n) = \inf_{d \in \Theta} r_n^*(d|\tilde{x}_n)$$

が成り立つことであると定義する.

このとき GBE $\hat{\theta}_n$ に対して

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \inf_{d \in \Theta} r_n(d|\tilde{x}_n) - r_n^*(\hat{\theta}_n|\tilde{x}_n) \right| = 0$$

が成り立つ.

さて、 θ を位置パラメータ、すなわち $f(x, \theta) = f(x - \theta)$ であると仮定する. さらに次の条件を仮定する.

$$(A.1) \quad f(x) > 0, \quad a < x < b; \\ f(x) = 0, \quad x \leq a, x \geq b.$$

(A.2) $f(x)$ は開区間 (a, b) において連続微分可能でかつ

$$0 < \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow b-0} f(x) < \infty$$

である.

仮定 (A. 1), (A. 2) の下では、一様性の maximum order が n となることは知られている (Akahira, 1975). 従ってこれ以後の議論においては、 $C_n = n$ の場合のみが論じられる.

3. 一般ベイズ推定量の両側漸近有効性.

まず、 $L^*(u) = u^2$, $\pi(\theta) \equiv 1$ に関する一般ベイズ推定量、すなわち Pitman 推定量について考察する. この推定量は正則な場合には、(高次の) 漸近有効性をもつことが知られている (Akahira and Takeuchi, 1981) が、非正則な場合にはどうなるであろうかという問題を検討する.

仮定 (A. 1) より

$$\prod_{i=1}^n f(x_i - \theta) > 0, \quad \max_i x_i - b < \theta < \min_i x_i - a;$$

$$\prod_{i=1}^n f(x_i - \theta) = 0, \quad \text{その他},$$

が成り立つから、その一般ベイズ推定量 $\hat{\theta}_{GB}$ は

$$\hat{\theta}_{GB} = \frac{\int_{\underline{\theta}}^{\bar{\theta}} \theta \prod_{i=1}^n f(x_i - \theta) d\theta}{\int_{\underline{\theta}}^{\bar{\theta}} \prod_{i=1}^n f(x_i - \theta) d\theta}$$

で与えられる. ただし $\underline{\theta} = \max_i x_i - b$, $\bar{\theta} = \min_i x_i - a$ とする.

このとき GBE $\hat{\theta}_{GB}$ が

$$\frac{1}{2}(\underline{\theta} + \bar{\theta}) = \frac{1}{2} \left\{ \min_i x_i + \max_i x_i - (a + b) \right\}$$

に漸近的に等しいことが示される (Akahira, 1982b).

また密度関数 $f(x)$ が仮定 (A.1), (A.2) を満たす場合は、Akahira (1982a) の Example 3 と同様に、区間 (a, b) 上の一様分布の場合に帰着されるから、推定量 $(\underline{\theta} + \bar{\theta})/2$ は両側漸近的有効になることが示される。ゆえに一般ベイズ推定量もまた両側漸近的有効となる。この結論は、対称な損失関数に関する GBE の場合にも拡張可能である。

次に、仮定 (A.2) において、 $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow b-0} f(x)$ が成り立つことを仮定したけれども、これが成り立たないときの典型的な例として、切断指数分布、すなわち

$$f(x) = \begin{cases} ce^{-x}, & 0 < x < 1 \\ 0, & x \leq 0, x \geq 1 \end{cases};$$

の場合を考える。ここで $c = e/(e-1)$ である。

このとき $\underline{\theta} = \max_i x_i - 1$, $\bar{\theta} = \min_i x_i$ である。いま θ_0 を真のパラメータとする。

(i) $L^*(u) = u^2$, $\pi(\theta) \equiv 1$ に関する GBE $\hat{\theta}_n^1$ は

$$n(\hat{\theta}_{GB}^1 - \theta_0) = \frac{Ae^A - Be^B}{e^A - e^B} - 1$$

となる。ここで $A = n(\bar{\theta} - \theta_0)$, $B = n(\underline{\theta} - \theta_0)$ とする。

(ii) $L^*(u) = |u|$, $\pi(\theta) \equiv 1$ に関する GBE $\hat{\theta}_n^2$ は

$$n(\hat{\theta}_{GB}^2 - \theta_0) = \log \frac{e^A + e^B}{2}$$

となる。

(i), (ii) からわかるように、GBE's は損失関数に依存して決まるから、 $\hat{\theta}_{GB}^1, \hat{\theta}_{GB}^2$ をそれぞれ AMU になるように修正した推定量 $\hat{\theta}_{GB}^{1*}, \hat{\theta}_{GB}^{2*}$ は両側漸近的有効にならないことが示される。

4. 2 次の両側漸近有効性.

この節では、ある切断正規分布の場合に AMU 推定量 $\hat{\theta}_n$ に対して、 θ の周りの集中確率 $P_\theta^n \{n|\hat{\theta}_n - \theta| < u\}$ の n^{-1} の order までの最大限界を求める。次に一般ベイズ推定量の n^{-1} の order までの漸近展開とその漸近密度によって、その限界との比較を行う。

まず密度関数 $f(x)$ が 次のような切断正規密度

$$f(x) = \begin{cases} ce^{-x^2/2}, & |x| < 1; \\ 0, & |x| \geq 1, \end{cases}$$

をもつとする。ただし c はある定数とする。

このとき

$$\prod_{i=1}^n f(x_i - \theta) = \begin{cases} c^n \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n x_i^2 + n\theta \bar{x} - \frac{n}{2} \theta^2\right), & \underline{\theta} < \theta < \bar{\theta}; \\ 0, & \text{その他} \end{cases}$$

となる。ここで $\bar{x} = \sum_{i=1}^n x_i / n$, $\underline{\theta} = \max_i x_i - 1$, $\bar{\theta} = \min_i x_i + 1$ である。

θ_0 を真のパラメータとし、 \mathcal{A} を AMU 推定量全体のクラスとする。Akahira and Takeuchi (1981) の第 3 章における方法と同様に、Neyman-Pearson の基本定理を用いて、AMU 推定量 $\hat{\theta}_n$ に対して θ の周りでの集中確率の最大限界を求める。 $\hat{\theta}_n \in \mathcal{A}$ に対する $P_{\theta}^n \{n | \hat{\theta}_n - \theta| < u\}$ の最大限界を求めるためには、 $\hat{\theta}_n$ が AMU 推定量であることから、

$$(4.1) \quad P_{\theta_0 + (u/n)}^n \{ \hat{\theta}_n < \theta_0 \} = P_{\theta_0 - (u/n)}^n \{ \hat{\theta}_n < \theta_0 \}$$

の最大限界を求めればよい。Neyman-Pearson の基本定理によつて

$$\phi_n^*(\tilde{x}_n) = \begin{cases} 1, & \prod_{i=1}^n f(x_i - \theta_0 - \frac{u}{n}) > \prod_{i=1}^n f(x_i - \theta_0 + \frac{u}{n}); \\ 0, & \prod_{i=1}^n f(x_i - \theta_0 - \frac{u}{n}) < \prod_{i=1}^n f(x_i - \theta_0 + \frac{u}{n}) \end{cases}$$

が、 \mathcal{A} における (4.1) の最大限界を

$$E_{\theta_0 + (u/n)}^n (\phi_n^*) = E_{\theta_0 - (u/n)}^n (\phi_n^*)$$

によつて与えることがわかる。

ここで

$$A = \{ \tilde{x}_n : \max_i x_i - 1 > \theta_0 - \frac{u}{n}, \min_i x_i + 1 > \theta_0 + \frac{u}{n} \},$$

$$B = \{ \tilde{x}_n : \max_i x_i - 1 < \theta_0 - \frac{u}{n}, \min_i x_i + 1 < \theta_0 + \frac{u}{n} \},$$

$$C = \{ \tilde{x}_n : \max_i x_i - 1 < \theta_0 - \frac{u}{n}, \min_i x_i + 1 > \theta_0 + \frac{u}{n} \},$$

$$D = \{ \tilde{x}_n : \bar{x} < c' \}$$

$$D' = \{ \tilde{x}_n : \bar{x} > c' \}$$

とおく. ただし $\bar{x} = \sum_{i=1}^n x_i/n$ で c' はある定数とする.

このとき

$$\phi_n^*(\tilde{x}_n) = \begin{cases} 1 & , \tilde{x}_n \in A^U(C \cap D); \\ 0 & , \tilde{x}_n \in B^U(C \cap D'), \end{cases}$$

となる.

\bar{X} , $\max_i X_i - 1$, $\min_i X_i + 1$ はたがいに漸近的に独立であるから、十分大きな n に対して

$$P_\theta^n(D|C) \sim P_\theta^n(D)$$

となり、 $E_{\theta_0}^n(\phi_n^*) = 1/2 + o(1/n)$ となるためには、

$P_{\theta_0}^n(D) = 1/2 + o(1/n)$ でなければならぬが、これは C を適当に選ぶことにより可能である.

よって十分大きな n に対して、

$$\begin{aligned} (4.2) \quad & \sup_{\hat{\theta}_n \in A} \left[P_{\theta_0+(u/n)}^n \{ \hat{\theta}_n < \theta_0 \} - P_{\theta_0-(u/n)}^n \{ \hat{\theta}_n < \theta_0 \} \right] \\ &= E_{\theta_0+(u/n)}^n(\phi_n^*) - E_{\theta_0-(u/n)}^n(\phi_n^*) \\ &\sim P_{\theta_0+(u/n)}^n(A) + P_{\theta_0}^n(D) P_{\theta_0+(u/n)}^n(C) - P_{\theta_0-(u/n)}^n(A) \\ &\quad - P_{\theta_0}^n(D) P_{\theta_0-(u/n)}^n(C) \\ &= P_{\theta_0+(u/n)}^n(A) - P_{\theta_0-(u/n)}^n(A) + \frac{1}{2} \{ P_{\theta_0+(u/n)}^n(C) \\ &\quad - P_{\theta_0-(u/n)}^n(C) \} \end{aligned}$$

となる.

一方 $\min_i X_i + 1$ の漸近分布は

$$(4.3) \quad G_1(t) = P_{\theta_0}^n \{ n(\min_i X_i + 1 - \theta_0) < t \} \\ = \begin{cases} 1 - e^{-kt} \left\{ 1 - \frac{k(k+1)}{2n} t^2 \right\} + o\left(\frac{1}{n}\right), & t > 0; \\ 0, & t \leq 0, \end{cases}$$

で与えられ、また $\max_i X_i - 1$ の漸近分布は

$$(4.4) \quad G_2(t) = P_{\theta_0}^n \{ n(\max_i X_i - 1 - \theta_0) < t \} \\ = \begin{cases} e^{kt} \left\{ 1 - \frac{k(k+1)}{2n} t^2 \right\} + o\left(\frac{1}{n}\right), & t \leq 0; \\ 1, & t > 0, \end{cases}$$

で与えられる。ただし $k = ce^{-1/2}$ である。

従って (4.3), (4.4) から、 $\min_i X_i + 1$, $\max_i X_i - 1$ の漸近密度はそれぞれ

$$(4.5) \quad g_1(t) = \begin{cases} ke^{-kt} \left\{ 1 - \frac{k(k+1)}{2n} t^2 + \frac{k+1}{n} t \right\} + o\left(\frac{1}{n}\right), & t > 0; \\ 0, & t \leq 0, \end{cases}$$

$$(4.6) \quad g_2(t) = \begin{cases} ke^{kt} \left\{ 1 - \frac{k(k+1)}{2n} t^2 - \frac{k+1}{n} t \right\} + o\left(\frac{1}{n}\right), & t \leq 0; \\ 0, & t > 0, \end{cases}$$

となることがわかる。

(4.5), (4.6) を用いると、

$$\begin{aligned}
P_{\theta_0+(u/n)}^n(A) &= P_{\theta_0+(u/n)}^n \left\{ \max_i x_i - 1 > \theta_0 - \frac{u}{n} \right\} P_{\theta_0+(u/n)}^n \left\{ \min_i x_i + 1 > \theta_0 + \frac{u}{n} \right\} \\
&= 1 - P_{\theta_0+(u/n)}^n \left\{ \max_i x_i - 1 < \theta_0 - \frac{u}{n} \right\} + o\left(\frac{1}{n}\right) \\
&= 1 - e^{-2ku} \left\{ 1 + \frac{2k(k+1)}{n} u^2 \right\} + o\left(\frac{1}{n}\right) \quad (u > 0);
\end{aligned}$$

$$P_{\theta_0-(u/n)}^n(A) = o\left(\frac{1}{n}\right);$$

$$P_{\theta_0+(u/n)}^n(C) - P_{\theta_0-(u/n)}^n(C) = o\left(\frac{1}{n}\right),$$

となるから、(4.2)より

$$\begin{aligned}
&\sup_{\hat{\theta}_n \in A} \left[P_{\theta_0+(u/n)}^n \{ \hat{\theta}_n < \theta_0 \} - P_{\theta_0-(u/n)}^n \{ \hat{\theta}_n < \theta_0 \} \right] \\
&= 1 - e^{-2ku} - \frac{2k(k+1)}{n} u^2 e^{-2ku} + o\left(\frac{1}{n}\right)
\end{aligned}$$

が成り立つ。

ゆえに任意のAMU推定量 $\hat{\theta}_n$ ，任意の θ ，任意の $u > 0$ に対して

$$(4.7) \quad P_{\theta}^n \{ n(\hat{\theta}_n - \theta) < u \} \leq 1 - e^{-2ku} - \frac{2k(k+1)}{n} u^2 e^{-2ku} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

が成り立つ、すなわち AMU推定量の θ の周りの集中確率の最大限界は (4.7) によって与えられる。

一方、 $L^*(u) = u^2$ ， $\pi(\theta) \equiv 1$ に属する GBE $\hat{\theta}_{GB}$ の n^{-1} の order までの漸近展開とその漸近密度は、次のようにして求められている (Akahira, 1982b)。

$\theta_0 = 0$ と仮定して一般性を失わない.

まず

$$\hat{\theta}_{GB} = \frac{\int_{\underline{\theta}}^{\bar{\theta}} \theta \prod_{i=1}^n f(x_i - \theta) d\theta}{\int_{\underline{\theta}}^{\bar{\theta}} \prod_{i=1}^n f(x_i - \theta) d\theta}$$

によって与えられる.

このとき $\theta = t/\sqrt{n}$, $Z = \sqrt{n} \bar{X}$ とおくと,

$$\hat{\theta}_{GB} = \frac{\frac{1}{\sqrt{n}} \int_{\sqrt{n}\underline{\theta}}^{\sqrt{n}\bar{\theta}} t e^{-\frac{t^2}{2} + Zt} dt}{\int_{\sqrt{n}\underline{\theta}}^{\sqrt{n}\bar{\theta}} e^{-\frac{t^2}{2} + Zt} dt}$$

となる. また $S = n(\underline{\theta} + \bar{\theta})/2$, $T = n(\bar{\theta} - \underline{\theta})/2$ とおくと,

$\hat{\theta}_{GB}$ の漸近展開は

$$n\hat{\theta}_{GB} = S + \frac{1}{3\sqrt{n}} ZT^2 - \frac{1}{2n} Z^2 S(S^2 - T^2) + \frac{1}{6n} S(S^2 - 3T^2) + o_p\left(\frac{1}{n}\right)$$

によって与えられる. よって $\hat{\theta}_{GB}$ の特性関数の漸近展開は

$$\begin{aligned} \phi_n(t) = E \left[e^{itS} \left\{ 1 + \frac{it}{3\sqrt{n}} ZT^2 - \frac{it}{2n} Z^2 S(S^2 - T^2) + \frac{it}{6n} S(S^2 - 3T^2) \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{t^2}{18n} Z^2 T^4 \right\} \right] + o\left(\frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} = E \left[e^{itS} \left\{ 1 - \frac{it}{2n} S^3 E(Z^2|S) + \frac{it}{2n} S E(Z^2 T^2|S) + \frac{it}{6n} S^3 \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{it}{2n} S E(T^2|S) - \frac{t^2}{18n} E(Z^2 T^4|S) \right\} \right] + o\left(\frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

$$= \frac{4k^2}{4k^2+t^2} + \frac{v_1 t^2}{n(4k^2+t^2)} + \frac{v_2 t^2}{n(4k^2+t^2)^2} + \frac{v_3 t^4 + v_4 t^2}{n(4k^2+t^2)^3} \\ + \frac{v_5 t^4 + v_6 t^2}{n(4k^2+t^2)^4} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

で与えられる。ただし v_i ($i=1, \dots, 6$) はある定数である。

ゆえに $\hat{\theta}_{GB}$ の漸近密度 $g_n(u)$ は

$$g_n(u) = k e^{-2k|u|} \left\{ 1 + \frac{1}{n} (c_0 + c_1 |u| + c_2 u^2 + c_3 |u|^3) + o\left(\frac{1}{n}\right) \right\}$$

となる。ただし c_i ($i=0, 1, 2, 3$) はある定数である。

このことから、GBE $\hat{\theta}_{GB}$ の θ の周りの集中確率は

$$(4.8) \quad P_\theta^n \{n|\hat{\theta}_{GB} - \theta| < u\} \\ = 1 - e^{-2ku} + \frac{a}{n} - \frac{1}{n} (a + bu + cu^2 + du^3) e^{-2ku} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

によって与えられる。ここで a, b, c, d はある定数である。

(4.7) と (4.8) によって、GBE $\hat{\theta}_{GB}$ は n^{-1} の order まで、 A における集中確率の最大限界を達成しないから、 $\hat{\theta}_{GB}$ は 2 次の両側漸近有効推定量ではないことがわかる。

5. むすび.

$R = (-r, r)$ とする。このとき θ の最大確率推定量 (maximum probability estimator 略して MPE) $\hat{\theta}_{MP}^r$ は

$$\int_{d-(r/n)}^{d+(r/n)} \prod_{i=1}^n f(x_i - \theta) d\theta$$

を最大にする d によって定義されている (Weiss and Wolfowitz, 1974). MPE が R に依存して決まることに注意する必要がある. また MPE $\hat{\theta}_{MP}^r$ は 0-1 損失関数と $\pi(\theta) \equiv 1$ に関する GBE とみなすことができる.

前節のような切断正規分布の場合に、MPE は

$$\hat{\theta}_{MP}^r = \begin{cases} \frac{1}{2}(\underline{\theta} + \bar{\theta}), & \bar{\theta} - \underline{\theta} > \frac{2r}{n}; \\ \bar{\theta} - \frac{r}{n}, & \bar{x} > \bar{\theta} - \frac{r}{n}, \bar{\theta} - \underline{\theta} \leq \frac{2r}{n}; \\ \underline{\theta} + \frac{r}{n}, & \bar{x} < \underline{\theta} - \frac{r}{n}, \bar{\theta} - \underline{\theta} \leq \frac{2r}{n}; \\ \bar{x}, & \underline{\theta} + \frac{r}{n} \leq \bar{x} \leq \bar{\theta} - \frac{r}{n}, \end{cases}$$

によって与えられ、これが両側漸近有効推定量でないことが知られている (Akakira and Takeuchi, 1981). しかし MPE $\hat{\theta}_{MP}^r$ は位置不変推定量全体のクラスの中で、集中確率の最大限界を n^{-1} の order まで、点 r において達成する推定量になっている.

非正則の場合は、第3, 4節において示されたように、GBE は両側漸近的有効にはなっても、2次の両側漸近的有効にはならない. このことは正則な場合と著しく異なる点である. しかし MPE のように、集中確率の最大限界とある点において

n^{-1} の order まで達成できるような推定量を構成をすることは可能であろう。

この小論においては、GBE を $L^*(u) = u^2$, $|u|$ と $\pi(\theta) \equiv 1$ の場合のみを考えたけれども、ここで得られた結論は、対称な損失関数および適当な条件を満たす事前密度 $\pi(\theta)$ の場合に拡張することは可能であろう。

References

- Akahira, M. (1975). Asymptotic theory for estimation of location in non-regular cases, I: Order of convergence of consistent estimators. Rep. Stat. Appl. Res., JUSE, 22, 8-26.
- Akahira, M. (1976). A remark on asymptotic sufficiency of statistics in non-regular cases. Rep. Univ. Electro-Comm., 27, 125-128.
- Akahira, M. (1982a). Asymptotic optimality of estimators in non-regular cases. Ann. Inst. Statist. Math., 34, Part A, 69-82.
- Akahira, M. (1982b). Remarks on asymptotic properties of generalized Bayes estimators in non-regular cases. Technical Report No. 185, Department of Statistics, Stanford University, Stanford, California.

- Akahira, M. and Takeuchi, K. (1981). Asymptotic Efficiency of Statistical Estimators: Concepts and Higher Order Asymptotic Efficiency. Lecture Notes in Statistics 7, Springer, New York.
- LeCam, L. (1956). On the asymptotic theory of estimation and testing hypothesis. Proc. Third Berkeley Symp. on Math. Statist. and Prob., 1, 129-156.
- Mita, H. (1979). Asymptotic sufficiency of maximum likelihood estimator in a truncated location family. Tokyo J. Math., 2, 323-335.
- Takeuchi, K. (1974). Tôkei-teki suitei no Zenkinriron (Asymptotic Theory of Statistical Estimation). (In Japanese), Kyôiku-Shuppan, Tokyo.
- Weiss, L. (1979). Asymptotic sufficiency in a class of non-regular cases. Selecta Statistica Canadiana, 5, 141-150.
- Weiss, L. and Wolfowitz, J. (1967). Maximum probability estimators. Ann. Inst. Statist. Math., 19, 193-206.